17

Perrin, page 143
Isenmann - Pecatte

Générateurs de $O(q)$ et $SO(q)$ pour E euclidien

On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et q une forme quadratique définie positive.

Théorème Le groupe $O(q)$ est engendré par les réflexions orthogonales.
Plus précisément, si $u \in O(q)$, u est le produit d'au plus n réflexions.

Soient $u \in O(q)$ et $F_u := \{x \in E \mid u(x) = x\}$ l'espace des points fixes.
On pose $p_u = n - \dim F_u$. Nous allons prouver que u est le produit d'au plus p_u réflexions, en raisonnant par récurrence sur p_u.

exactement p_u en fait
cf Isenmann - Pecatte à ajouter !

- si $p_u = 0$ alors $u = id$ est bien le produit de 0 réflexions
- si $p_u > 0$, soit $x \in F_u^{\perp} \setminus \{0\}$ et $y = u(x)$.

On a alors :

$y \neq x$ car $x \notin F_u$

$y \in F_u^{\perp}$ car F_u étant stable par u, $F_u^{\perp}$ l'est aussi — $\forall z \in F_u$, $\langle z, u(y)\rangle = \langle u(z), u(y)\rangle = \langle z, y\rangle = 0$

De plus, $\|x\| = \|u(x)\| = \|y\|$ donc :

$\langle x-y, x+y\rangle = 0$ i.e. $x-y \perp x+y$

En considérant la réflexion orthogonale τ définie par le vecteur $x-y$, on a alors : — $\tau = id$ sur $H = (x-y)^{\perp}$ et $\tau = -id$ sur $\langle x-y\rangle$

$\tau(x-y) = y-x$ $\qquad$ $\tau(x+y) = x+y$

Donc en soustrayant ces deux égalités, $\tau(y) = x$.

De plus,

$x - y \in F_u^{\perp}$ donc $F_u \subset (x-y)^{\perp}$ d'où $\tau_{|F_u} = id$

Par conséquent, $F_{\tau \circ u} \supsetneq F_u$ avec inclusion stricte car $x \notin F_u$ et $x \in F_{\tau \circ u}$.

On obtient ainsi :

$p_{\tau \circ u} < p_u$ et $\tau \circ u \in O(q)$.

Donc, par hypothèse de récurrence, il existe $r \in \mathbb{N}^*$, $\tau_1, \dots, \tau_r$ réflexions tels que :

$\tau \circ u = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$ avec $r \leqslant p_{\tau \circ u}$

D'où : — $\tau = \tau^{-1}$

$u = \tau \circ \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$ avec $r + 1 \leqslant p_{\tau \circ u} + 1 \leqslant p_u$

Lemme Supposons $n \geqslant 3$.
Soient τ_1, τ_2 des réflexions, il existe alors des renversements σ_1, σ_2 tels que $\tau_1 \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$.

Posons $u = \tau_1 \tau_2$.
On considère H_1 et H_2 les hyperplans de τ_1 et τ_2, et V un sous-espace de dimension $n-3$ de $H_1 \cap H_2$. — de dimension $n-2$

On a alors :

$u_{|V} = id$ donc $u(V^{\perp}) \subset V^{\perp}$

Or $\dim V^{\perp} = 3$ donc $\sigma_i := -\tau_{i|V^{\perp}}$ est un renversement de $V^{\perp}$ et en prolongeant σ_i par l'identité sur V, on obtient : — se voit matriciellement

$u = \tau_1 \circ \tau_2 = \sigma_1 \circ \sigma_2$ est le produit de renversements.

Théorème Supposons $n \geqslant 3$. Le groupe $O^+(q)$ est engendré par les renversements.
Plus précisément, tout élément $u \in O^+(q)$ est produit d'au plus n renversements.

Soit $u \in SO(q)$. On a alors $u = \tau_1 \dots \tau_{2k}$ avec $2k \leqslant n$ et τ_i réflexion orthogonale. — nécessairement pair car $\det(\tau_i) = -1$ et $\det(u) = 1$

Or pour tout $i \in [\![1, 2k]\!]$, impair,

il existe σ_i, σ_{i+1} des renversements tels que $\tau_i \tau_{i+1} = \sigma_i \sigma_{i+1}$

Donc :

$u = \sigma_1 \dots \sigma_{2k}$ avec $2k \leqslant n$.